비선형 시스템의 좌표 변환

심 형 보

2011년 8월 17일

복습: 선형 시스템의 좌표 변환은 어떻게 했나요?

선형 시스템의 경우 유사 변환(similarity transformation) 이용

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

에 대하여 nonsingular 행렬 T를 이용하여 새로운 z를 정의:

$$z = Tx \quad \text{: Similarity transformation}$$

따라서

$$\dot{z} = T(Ax + Bu) = TAT^{-1}z + TBu =: \bar{A}z + \bar{B}u$$

비선형 시스템의 좌표 변환은 어떻게 하나요?

비선형 시스템의 경우 diffeomorphism 이용

상태 공간 $\mathbb{R}^n$에 어떤 부분 집합 D ($D = \mathbb{R}^n$일 수도 있음) 위에 정의된 map Φ를 생각하자.

$$\Phi : D \to \Phi(D) \subset \mathbb{R}^n$$

이 map Φ이 영역 D에서 invertible하고 Φ와 Φ^{-1}가 continuously differentiable하면 diffeomorphism이라 한다.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

라는 비선형 시스템은 $z = \Phi(x)$에 의해

$$\dot{z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\dot{x} = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{x=\Phi^{-1}(z)} \cdot \left(f(\Phi^{-1}(z)) + g(\Phi^{-1}(z))u\right) =: \bar{f}(z) + \bar{g}(z)u$$

연습: 각자 해 봅시다

원래 시스템:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + \sin x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \cos x_1 + u \cos(2x_1)\end{aligned}$$

Diffeomorphism:

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1 & \qquad x_1 &= z_1 \\ z_2 &= x_2 + \sin x_1 & \qquad x_2 &= z_2 - \sin z_1\end{aligned}$$

변환된 시스템:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -2x_1 + x_2 + \sin x_1 = -2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -x_2 \cos x_1 + u\cos(2x_1) + \cos x_1[-2x_1 + x_2 + \sin x_1] \\ &= -2z_1 \cos z_1 + \cos z_1 \sin z_1 + u\cos(2z_1)\end{aligned}$$

Note: Feedback linearization

$z = Tx$와 $z = \Phi(x)$를 비교하면서 생기는 질문들

- 왜 Φ와 Φ^{-1}의 continuous differentiability가 필요한 건가요?
- x 좌표계의 원점이 z 좌표계에서 보존되나요?
- Φ은 영역 D에서만 유효한가요?

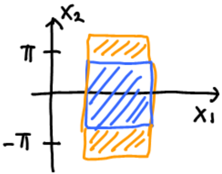
Φ가 영역 D에서 diffeomorphism인지 어떻게 판단하죠?

Fact 1: $\Phi(x)$ is diffeomorphism on D if and only if

1. Jacobian of $\Phi(x)$ is nonsingular on D
2. $\Phi(x)$ is one-to-one (injective) from D to $\Phi(D)$

1번이 2번을 자동으로 보장하지는 않는다. 예를 들어,

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \Phi(x) = \begin{bmatrix} x_1 \cos x_2 \\ x_1 \sin x_2 \end{bmatrix}$$



일 때, Jacobian은

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \cos x_2 & -x_1 \sin x_2 \\ \sin x_2 & x_1 \cos x_2 \end{bmatrix}$$

이므로 $\det(\Phi(x)) = x_1$이고 그림과 같은 영역 D에서 1번은 성립하나 2번은 성립하지 않는다.

Injectivity를 검사하는 것이 쉽나요?

원칙적으로는 Φ^{-1}를 구해봐야 하므로 쉽지 않다

Local version: If $\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}$ is nonsingular at a point x_0, then $\exists$ a (small) set D ($x_0 \in D$) such that $\Phi(x)$ is injective on D (and therefore, is diffeomorphism on D).

(증명은 inverse function theorem을 적용하면 되고, 여러 책에 나오므로 생략.)

Global version: $\Phi(x)$ is a global diffeomorphism if and only if $\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}$ is nonsingular for all x, and $\Phi(x)$ is proper (i.e., $|\Phi(x)|$ goes to ∞ when $|x|$ goes to ∞).

(증명은 [Sandberg;IEEE TCS(1980)], [Wu,Desoer;IEEE TCT(1972)] "Global Inverse Function Theorems")

Regional version: If $\det\left(\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}\right) > 0$ for all $x \in D$, and $\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}\right)^T$ has nonnegative principal minors for all $x \in D$, then $\Phi(x)$ is injective on D (and therefore, is diffeomorphism on D).

(증명은 [Kou,Elliott,Tarn;Information and Control(1973)])