Singular Perturbation Theory의 소개

심 형 보

2011년 8월 17일

어떤 시스템은 빠른 상태변수와 느린 상태변수를 동시에 가진다.

다음 시스템의 거동을 예상해 보자.

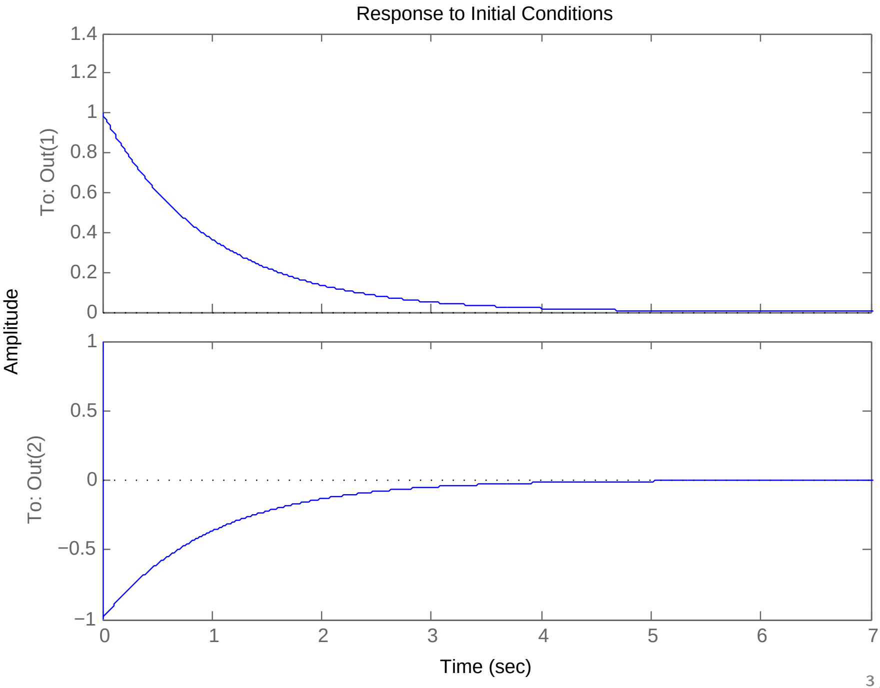
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= z(t), & x(0) = z(0) = 1, \\ \dot{z}(t) &= -1000z(t) - 1000x(t) \end{aligned}$$

$$z(t) \to -x(t), \qquad \dot{x}(t) \approx -x(t)$$

결국 $x(t) \to 0$, $z(t) \to 0$일 것이다.

$\frac{1}{1000}$을 ϵ으로 표기하면, $\epsilon \ll 1$이고 시스템은

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= z(t), & x(0) = z(0) = 1, \\ \epsilon\dot{z}(t) &= -z(t) - x(t) \end{aligned}$$



Response to Initial Conditions
Amplitude
To: Out(1)
To: Out(2)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
0.5
0
−0.5
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
Time (sec)

빠른 부분과 느린 부분으로 나누어 진다면, eigenvalue 에도 그런 사실이 반영이 되겠지요?

예

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\epsilon} & -\frac{1}{\epsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$ 의 시스템 행렬의 eigenvalue는

$\dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4\epsilon}}{2\epsilon}$ 인데 $\sqrt{1-4\epsilon} = 1 + \dfrac{-4}{2\sqrt{1-4\epsilon}}\Big|_{\epsilon=0} \epsilon + \cdots = 1 - 2\epsilon + \cdots$

이므로 두 eigenvalue는

$$\begin{cases} \frac{-2+2\epsilon+\cdots}{2\epsilon} = -\frac{1}{\epsilon} + 1 + O(\epsilon) \\ \frac{-1+1-2\epsilon+\cdots}{2\epsilon} = -1 + O(\epsilon) \end{cases}$$

$\epsilon = 0$이라고 상상해 보면 시스템의 extreme behavior을 쉽게 구할 수 있다.

- $\epsilon = 0$이면, z-dynamics는 사라지고, $z(t) = -x(t)$와

$$\dot{x}(t) = -x(t)$$

  를 얻는다. 즉, z-dynamics가 극도로 빨라 $z(t)$가 순식간에 $-x(t)$로 수렴한 이후의 dynamics를 나타낸 것으로 이해할 수 있다. 이 시스템을 'quasi-steady-state subsystem'이라 부른다.
- 이렇게 구한 extreme behavior는 물론 근사화한 것이고, 이 근사는 ϵ이 작을 수록 정확할 것이다.
- 그런데 $z(t) \to -x(t)$하는 과정은 볼 수가 없다.

$z(t) \to -x(t)$하는 과정을 볼 수는 없나요?

빠르게 지나가는 시간 t를 늘려서 살펴 본다.

$$\tau := \frac{t}{\epsilon}$$

이라 하면,

$$\epsilon \dot{z} = \epsilon \frac{dz(t)}{dt} = \frac{dz(t)}{d(t/\epsilon)} = \frac{dz(\epsilon\tau)}{d\tau} = -z(\epsilon\tau) - x(\epsilon\tau)$$

이 상태에서 $\epsilon \to 0$이라 하면, 빠른 동역학의 extreme behavior를 볼 수 있다.

$$\frac{d\bar{z}(\tau)}{d\tau} = -\bar{z}(\tau) - x(0)$$

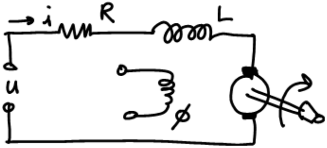
- 이 시스템을 'boundary-layer subsystem'이라 부른다.
- 빠른 동역학을 근사한 것으로 ϵ이 작을 수록 근사가 정확하다.

왜 Singular perturbation이라 부르나요?

- Regular perturbation: $\dot{x} = f(x, \epsilon)$에서 ϵ이 조금 변해도 시스템 차수는 변화가 없다.
- Singular perturbation: $\epsilon \dot{z} = f(x, z, \epsilon)$에서 ϵ이 작은 값에서 0으로 "조금" 변했는데, 시스템 차수가 바뀌었다. 기묘하다 $\rightarrow$ 'singular'
- 우리말은 '특이섭동이론'?

모델 간략화를 정당화하는 특이 섭동 이론

$$J\frac{d\omega}{dt} = ki$$
$$L\frac{di}{dt} = -k\omega - Ri + u$$



Armature-controller DC motor

where L is small.

L을 singular perturbation의 ϵ이라 하고, $L = 0$이라고 놓으면, $i = \frac{u-k\omega}{R}$이므로

$$J\frac{d\omega}{dt} = -\frac{k^2}{R}\omega + \frac{k}{R}u \quad \text{(QSS subsystem)}$$

BL subsystem은

$$\frac{di}{d\tau} = -k\omega(0) - Ri + u(0)$$

Note: 만약 $\epsilon = L/2$로 한다면?

특이 섭동 이론의 기본 가정이 있다던데요...

Singular perturbation 표준형:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, z, \epsilon), \qquad & x(0) &= \xi(\epsilon) \in \mathbb{R}^n, \\ \epsilon\dot{z} &= g(t, x, z, \epsilon), \qquad & z(0) &= \eta(\epsilon) \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

선형시스템의 경우:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{11}x + A_{12}z + B_1u, \qquad & & x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^p, \\ \epsilon\dot{z} &= A_{21}x + A_{22}z + B_2u, \qquad & & 0 < \epsilon \ll 1 \end{aligned}$$

이 때, x를 'slow variable', z를 'fast variable'이라 부른다.

기본 가정: (1) $g(t, x, z, 0) = 0$ has an isolated solution $z = h(t, x)$,
(2) z-dynamics is asymptotically stable for each fixed (t, x, ϵ).

기본 가정: A_{22} is Hurwitz.

주어진 시스템을 어떻게 표준형으로 가져갈 수 있지요?

- 기본적으로 좌표변환을 이용한다.
- ϵ을 잡는 방법이 유일하지 않으므로, 표준형도 유일하지 않다.
- 표준형으로 변환하는 일반적 방법은 없다.

이제 Model Reduction(모델 간략화)을 쉽게 얻을 수 있다

QSS subsystem:

$$
\begin{aligned}
z = h(t,x) \quad &\rightarrow \quad \dot{x} = f(t,x,h(t,x),0) \\
z = -A_{22}^{-1}(A_{21}x + B_2u) \quad &\rightarrow \\
&\dot{x} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)u
\end{aligned}
$$

또는, ‘reduced system’이라고도 불린다.

(이제부터 구별을 위하여 이 시스템의 해를 $\bar{x}(t)$라 하자.)

Tikhonov의 정리란 무엇인가요?

실제 시스템

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, z, \epsilon), & x(0) &= \xi(\epsilon), \\ \epsilon \dot{z} &= g(t, x, z, \epsilon), & z(0) &= \eta(\epsilon) \end{aligned}$$

과 reduced system

$$\dot{\bar{x}} = f(t, \bar{x}, h(t, \bar{x}), 0), \quad \bar{z}(t) = h(t, \bar{x}(t)), \quad \bar{x}(0) = \xi(0)$$

의 해를 비교하자. ($\bar{z}(0) \neq \eta(0)$임을 바로 알 수 있다.)

Tikhonov's Theorem: 주어진 $\hat{t}$와 T $(0 < \hat{t} < T)$에 대하여 다음 관계가 충분히 작은 ϵ에 대해 성립:

$$\begin{aligned} x(t, \epsilon) - \bar{x}(t) &= O(\epsilon), & {}^{\forall} t &\in [0, T], \\ z(t, \epsilon) - h(t, \bar{x}(t)) &= O(\epsilon), & {}^{\forall} t &\in [\hat{t}, T], \end{aligned}$$

and $z(t, \epsilon) \to \bar{z}(t)$ during $t \in [0, \hat{t}]$.

몇 가지 언급할 사항들

- 위 정리는 local 영역에서 성립.
  자세한 영역 해석은 Khalil책 등 참조
- 무한시간까지 하려면?
  (결국 Reduced system의 안정도 필요)
  F.C. Hoppensteadt (1966). Singular perturbations on the infinite interval. *Transactions of the American Mathematical Society*
- ξ와 η가 연속 함수여서 $\epsilon = 0$일 때 잘 정의된다는 사실을 눈여겨 보자. 이것 때문에 $\epsilon \to 0$일 때 'peaking phenomenon'이 발생하지 않는 것이다.
- 'Peaking phenomenon'이 뭔가요?
  우리 강좌의 범위를 벗어나지만,
  H.J. Sussmann & P.V. Kokotovic (1991). The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*
  참고하면 됩니다.

Tikhonov 정리가 제어기 설계에 쓰일 때 주의점

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = u$$
$$u = -\frac{1}{\epsilon^2}x_1 - \frac{2}{\epsilon}x_2$$

$$z = \begin{bmatrix} \frac{1}{\epsilon} - 2 & -\epsilon \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$\epsilon\dot{z}_1 = z_2$$
$$\epsilon\dot{z}_2 = -z_1 - 2z_2$$

이 문제를 극복하는 것에 대한 참고문헌:

- J. Back & H. Shim (2008). Adding Robustness to Nominal Output Feedback Controllers for Uncertain Nonlinear Systems: A Nonlinear Version of Disturbance Observer. *Automatica*
- H. Shim & N.H. Jo (2009). An Almost Necessary and Sufficient Condition for Robust Stability of Closed-loop Systems with Disturbance Observer. *Automatica*

이를 통해 Robust control with robust transient response 확보

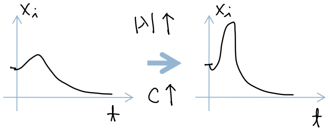
* What is Peaking Phenomenon?

[Sussmann & Kokotovic (1991) IEEE TAC] "The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems"

$$\dot{x} = Ax + Bu = (A + BK)x \quad \text{with} \quad u = Kx$$

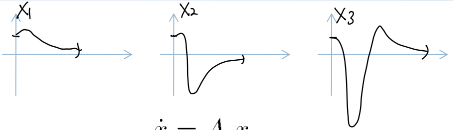
$$\|x(t)\| \leq Ce^{\lambda t}\|x(0)\|$$

$$\lambda := \max\left[\mathrm{Re}\{\lambda_i(A + BK)\}\right]$$



$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = u$$
$$u = \epsilon^3 a_1 x_1 + \epsilon^2 a_2 x_2 + \epsilon a_3 x_3$$

$$A_\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \epsilon^3 a_1 & \epsilon^2 a_2 & \epsilon a_3 \end{bmatrix}$$

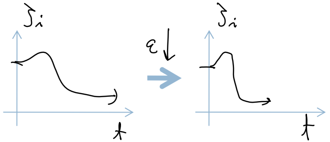


$$\dot{x} = A_\epsilon x$$

$$\xi_1 = x_1 \qquad \dot{\xi}_1 = x_2 = \epsilon \xi_2$$
$$\xi_2 = \frac{1}{\epsilon} x_2 \qquad \dot{\xi}_2 = \frac{1}{\epsilon} x_3 = \epsilon \xi_3$$
$$\xi_3 = \frac{1}{\epsilon^2} x_3 \qquad \dot{\xi}_3 = \frac{1}{\epsilon^2} u = \epsilon a_1 \xi_1 + \epsilon a_2 \xi_2 + \epsilon a_3 \xi_3$$

$$\frac{1}{\epsilon}\frac{d\xi}{dt} = A_1 \xi$$

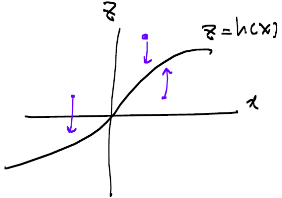
$$\|\xi(t)\| \leq C_\xi e^{\lambda_\xi t}\|\xi(0)\|$$



It is an intrinsic property of the control systems, which is not avoidable!

상태공간 상에서 살펴 보면 좀더 직관적인 이해가 가능하다

$$\dot{x} = f(x, z), \qquad x \in \mathbb{R}^1,$$
$$\epsilon \dot{z} = g(x, z), \qquad z \in \mathbb{R}^1$$



에 대하여, $z = h(x)$가 $g(x, z) = 0$의 해라 하자. 집합 $\{(x, z) : z = h(x)\}$는

- 1차 (smooth) manifold이다. 'Slow manifold'라 부른다.
- $\epsilon = 0$라면 invariant manifold이고, 이 집합 위에서 시스템의 지배 방정식은 $\dot{x} = f(x, h(x))$이다.
- $\epsilon > 0$이라면 이 집합은 일반적으로 invariant하지 않다. (그럼, invariant manifold는?)

실제 invariant manifold는 이상적인 manifold $z = h(x)$ 근처에 있다

$$\dot{x} = -x + z$$
$$\epsilon \dot{z} = \tan^{-1}(1 - z - x)$$

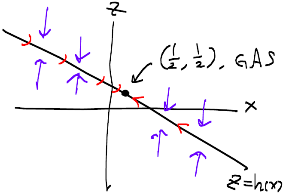
With $z = h(x) = 1 - x$, the QSS subsystem is

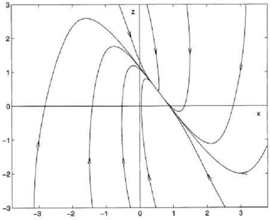
$$\dot{x} = -x + (1 - x) = -2x + 1$$

and the boundary-layer subsystem is

$$\frac{dz}{d\tau} = \tan^{-1}(1 - z - x(0))$$

아래 두 그림을 비교해 보자. ($\epsilon = 0$, $\epsilon = 0.1$)



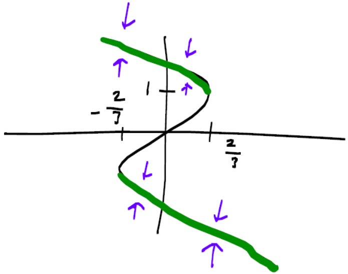


특이 섭동 이론의 지식을 이용하여 복잡한 비선형 시스템의 동작을 예측할 수도 있다

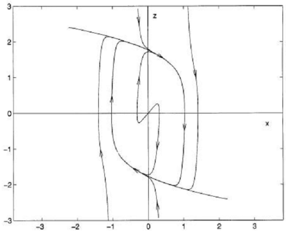
Van der Pol oscillator:

$$\dot{x} = z$$
$$\dot{z} = \frac{1}{\epsilon}(-x + z - \frac{1}{3}z^3)$$

Slow manifold: $x = -\frac{1}{3}z^3 + z$로 부터 $z = h(x)$구한다.



ϵ=0



ϵ=0.1

초록색은 BL subsystem에 대하여 안정한 평형점을 표시.

특이 섭동 이론은 안정도 해석에도 사용된다

BL subsystem과 QSS subsystem의 원점이 안정하면, 원래 시스템의 원점도 충분히 작은 ϵ에 대하여 안정하다.

편의상 선형 시스템으로 진행하자.

$$\dot{x} = A_{11}x + A_{12}z$$
$$\epsilon\dot{z} = A_{21}x + A_{22}z, \qquad A_{22} : \text{Hurwitz}$$

With $z = h(x) = -A_{22}^{-1}A_{21}x$, define $y := z - h(x)$. 이제 $(x, z) \leftrightarrow (x, y)$의 좌표변환을 하자.

$$\dot{x} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x + A_{12}y$$
$$\begin{aligned}\epsilon\dot{y} &= A_{21}x + A_{22}(y + h(x)) - \epsilon\frac{\partial h}{\partial x}\dot{x} \\ &= A_{22}y + \epsilon A_{22}^{-1}A_{21}[(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x + A_{12}y] \\ &= (A_{22} + \epsilon A_{21})y + \epsilon A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x\end{aligned}$$

행렬 $(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) =: A_s$도 Hurwitz라 가정

이제 행렬 $P_s = P_s^T > 0$와 $P_f = P_f^T > 0$를 각각

$$P_s A_s + A_s^T P_s = -I$$
$$P_f A_{22} + A_{22}^T P_f = -I$$

의 해라 하고, 두 Lyapunov 함수 $V_s(x) = \frac{1}{2}x^T P_s x$, $V_f(y) = \frac{1}{2}y^T P_f y$를 잡는다. 이제 $0 < d < 1$인 어떤 d에 대해 $V(x,y) := (1-d)V_s(x) + dV_f(y)$라 하면,

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= (1-d)\left[\frac{1}{2}x^T(P_s A_s + A_s^T P_s)x + x^T P_s A_{12} y\right] \\
&\quad + d\left[\frac{1}{2\epsilon}y^T(P_f A_{22} + A_{22}^T P_f)y + y^T P_f A_{21} y + y^T P_f A_{22}^{-1} A_{21} A_s x\right] \\
&\le -\frac{1-d}{2}|x|^2 + (1-d)\|P_s A_{12}\||x||y| - \frac{d}{2\epsilon}|y|^2 \\
&\quad + d\|P_f A_{21}\||y|^2 + d\|P_f A_{22}^{-1} A_{21} A_s\||y||x|
\end{aligned}$$

$m_1 := \|P_s A_{12}\|$, $m_2 := \|P_f A_{22}^{-1} A_{21} A_s\|$, $m_3 := \|P_f A_{21}\|$ 라 하고 정리하면,

$$\dot{V} \leq -\begin{bmatrix}|x|\\|y|\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1-d}{2} & -\frac{1-d}{2}m_1 - \frac{d}{2}m_2\\ -\frac{1-d}{2}m_1 - \frac{d}{2}m_2 & d\left(\frac{1}{2\epsilon} - m_3\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|x|\\|y|\end{bmatrix}$$

따라서,

$$\frac{1-d}{2}d\left(\frac{1}{2\epsilon} - m_3\right) - \left(\frac{1-d}{2}m_1 + \frac{d}{2}m_2\right)^2 > 0$$

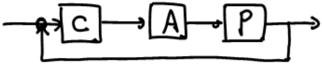
$$\Leftrightarrow \qquad \epsilon < \frac{d(1-d)}{((1-d)m_1 + dm_2)^2 + 2d(1-d)m_3}$$

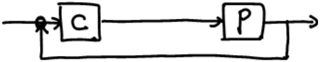
이고, 우변은 $d = \frac{m_1}{m_1+m_2}$에서 최대. 결국,

$$\epsilon < \frac{1}{4m_1m_2 + 2m_3(m_1+m_2)}$$

이면 $\dot{V} < 0$.

빠른 actuator 동력학을 무시해도 되는 이유





$$
\begin{aligned}
&\text{설계 폐루프 :} \qquad && \dot{x} = f(x, v), \quad && v = \gamma(x) \\
&\text{실제 폐루프 :} \qquad && \dot{x} = f(x, v), \quad && v = \bar{C} z \\
& && \dot{z} = \bar{A} z + \bar{B} u, \quad && u = \gamma(x)
\end{aligned}
$$

$\bar{A}$: Hurwitz, 고유치는 복소평면상 매우 왼쪽에 위치,
$-\bar{C}\bar{A}^{-1}\bar{B} = I$.
특정 좌표계에서 $\bar{A} = \frac{1}{\epsilon}A$, $\bar{B} = \frac{1}{\epsilon}B$, $\bar{C} = C$로 표현할 수 있다면 (이렇게 되면 $\bar{A}$의 고유치는 A의 고유치의 $1/\epsilon$배), actuator를

$$
\epsilon \dot{z} = Az + Bu, \qquad v = Cz
$$

로 나타낼 수 있고, 특이 섭동 이론을 사용하여 QSS subsystem 이 설계 폐루프 시스템과 같음을 알 수 있다. 따라서, 충분히 작은 ϵ에 대해 실제 폐루프 시스템은 여전히 안정하다.

특이 섭동 이론은 제어기 설계에도 쓰인다

High-gain feedback으로 robust control하는 경우의 예

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = ax_2 + \delta + u, \qquad |a| \le 1, |\delta| \le 1$$

High-gain feedback: $u = -k(x_2 + x_1)$ with $k \gg 1$

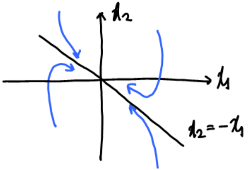
이제 $\epsilon := 1/k$라고 하면,

$$\epsilon \dot{x}_2 = -(x_2 + x_1) + \epsilon(ax_2 + \delta)$$

이므로, $x_2 = h(x_1) = -x_1$이고,

BL subsys. : $\dfrac{dx_2}{d\tau} = -x_2 - x_1(0)$

QSS subsys. : $\dot{x}_1 = -x_1$



Note: SMC, Backstepping과 비교